अध्याय **4**

4.1 समग्र अवलोकन (Overview)

हम n कोटि के प्रत्येक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ को एक संख्या (वास्तविक या सम्मिश्र) द्वारा सबंधित करा सकते हैं जिसे वर्ग आव्यूह का सारणिक कहते हैं। इसे detA, द्वारा निरूपित किया जाता है। जहाँ a_{ij} अव्यव A का (i, j)वाँ आव्यूह है।

यदि $A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ है तो A का सारणिक को |A| (या det A)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$ द्वारा दिया जाता है।

टिप्पणी

(i) केवल वर्ग आव्यूहों के सारणिक होते हैं।

(ii) आव्यूह A के लिए $|A|$ को A का सारणिक पढ़ते हैं न कि A का परिमाण (Modulus)

4.1.1 *एक कोटि के आव्यूह का सारणिक (Determinants of a matrix of order one)*

माना एक कोटि का आव्यूह $A = [a]$ है तो A के सारणिक को a के बराबर परिभाषित किया जाता है।

4.1.2 *द्वितीय कोटि के आव्यूह का सारणिक (Determinants of a matrix of order two)*

माना कोटि 2 का आव्यूह $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ है। तब A के सारणिक को इस प्रकार परिभाषित करते हैं- det (A) = |A| = $ad - bc$.

4.1.3 *कोटि 3 के आव्यूह का सारणिक (Determinants of a matrix of order 3)*

तृतीय कोटि के आव्यूह के सारणिक को द्वितीय कोटि के सारणिकों में व्यक्त करके ज्ञात किया जाता है। यह एक सारणिक का एक पंक्ति (या एक स्तंभ) के अनुदिश प्रसरण कहलाता है। तृतीय कोटि के

सारणिक को छह प्रकार से प्रसारित किया जा सकता है यह है। तीनों पंक्तियों (R_1, R_2 तथा R_3) और तीनों स्तंभों (C_1, C_2 तथा C_3) में से प्रत्येक के संगत प्रसरण है प्रत्येक प्रसरण से समान ही मान प्राप्त होता है।

वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]_{3\times3}$, के सारणिक पर विचार कीजिए, जहाँ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

|A| को C_1, के अनुदिश प्रसरण करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है।

$$|A| = a_{11}\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\,(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\,(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{21}\,(a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}) + a_{31}\,(a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22})$$

टिप्पणी व्यापक रूप में यदि $A = kB$, है जहाँ A और B कोटि n के वर्ग आव्यूह हैं तब $|A| = k^n\,|B|$, $n = 1, 2, 3$.

4.1.4 सारणिकों के गुणधर्म (*Properties of Determinations*)

किसी भी वर्ग आव्यूह A के लिए, |A| निम्नलिखित गुणधर्मो को संतुष्ट करता है।

(i) $|A'| = |A|$, जहाँ A' आव्यूह A का परिवर्त है।

(ii) यदि हम एक सारणिक की कोई दो पंक्तियों (या स्तंभों) को परस्पर परिवर्तित कर दें तो सारणिक का चिन्ह परिवर्तित हो जाता है।

(iii) यदि एक सारणिक की कोई दो पंक्तियाँ (अथवा स्तंभ) समान हैं (या समानुपाती है) तब सारणिक का मान शून्य होता है।

(iv) किसी सारणिक को एक अचर k से गुणा करने का अर्थ है कि इसके केवल एक पंक्ति (अथवा स्तंभ) के प्रत्येक अवयव को k से गुणा करना।

(v) यदि हम एक सारणिक के किसी एक पंक्ति (अथवा स्तंभ) के प्रत्येक अवयव को एक अचर k से गुणा करते हैं तो सारणिक का मान भी k से गुणित हो जाता है।

(vi) यदि एक सारणिक की एक पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों को दो या अधिक पदों के योगफल के रूप में व्यक्त किया गया हो तो दिए गए सारणिक को दो या अधिक सारणिकों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

(vii) यदि एक सारणिक की किसी पंक्ति (या स्तंभ) के प्रत्येक अवयव में दूसरी पंक्ति (या स्तंभ) के संगत अवयवों के समान गुणज़ों को जोड़ दिया जाता है तो सारणिक का मान वही रहता है।

टिप्पणी

(i) यदि किसी पंक्ति (या स्तंभ) के सभी अवयव शून्य हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

(ii) यदि $x = \alpha$ रखने पर सारणिक 'Δ' का मान शून्य हो जाता है तब 'Δ' का एक गुणनखंड $(x - \alpha)$ होता है।

(iii) यदि किसी सारणिक के मुख्य विकर्ण के ऊपर या नीचे के सभी अवयव शून्य हैं तब सारणिक का मान विकर्ण के सभी अवयवों के गुणनफल के बराबर होता है।

4.1.5 *त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of a triangle)*

(x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) शीर्षों वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$ से दिया जाता है।

4.1.6 *उपसारणिक और सहखंड (Minors and Co-factor)*

(i) आव्यूह A के सारणिक के अवयव a_{ij} का उप-सारणिक वह सारणिक है जो i वीं पंक्ति और j वें स्तंभ को हटाने से प्राप्त होता है तथा इसे M_{ij} द्वारा व्यक्त करते हैं।

(ii) एक अवयव a_{ij} के सहखंड को $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ द्वारा दिया जाता है।

(iii) किसी आव्यूह A के सारणिक का मान किसी पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों और उनके संगत सहखंडों के गुणनफल का योग होता है। उदाहरणार्थ

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

(iv) यदि एक पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों को अन्य पंक्ति (या स्तंभ) के सहखंडों से गुणा किया जाए तो उनका योग शून्य होता है। उदाहरणार्थ

$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0$$

4.1.7 *आव्यूह के सहखंडज और व्युत्क्रम (Adjoint and Inverse of a Matrix)*

(i) एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ के सहखंडज को आव्यूह $[A_{ij}]_{n\times n}$ के परिवर्त के रूप में

परिभाषित किया जाता है। जहाँ A_{ij} अवयव a_{ij} का सहखंड है। इसे *adj* A द्वारा व्यक्त करते हैं।

यदि $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, तब $adj\ A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$, जहाँ A_{ij} का सहखंड a_{ij} है।

(ii) $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\ I$, जहाँ A एक कोटि n का वर्ग आव्यूह है।

(iii) यदि $|A| = 0$ तो वर्ग आव्यूह A को अव्युत्क्रमणीय (singular) कहते हैं तथा यदि $|A| \neq 0$ हो तो व्युत्क्रमणीय (non-singular) कहते हैं

(iv) यदि A एक कोटि n का वर्ग आव्यूह है तो $|adj\ A| = |A|^{n-1}$ होता है।

(v) यदि A और B समान कोटि की व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं तो AB तथा BA भी उसी कोटि की व्युत्क्रमणीय आव्यूह होंगे।

(vi) आव्यूहों के गुणनफल का सारणिक उनके क्रमशः सारणिकों के गुणनफल के समान होता है। अर्थात् $|AB| = |A|\ |B|$

(vii) यदि $AB = BA = I$ हो जहाँ A और B वर्ग आव्यूह हैं तब B को A का व्युत्क्रम कहते हैं और इसे $B = A^{-1}$ लिखते हैं। इसके अतिरिक्त $B^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$ होता है।

(viii) आव्यूह A व्युत्क्रमणीय होता है यदि और केवल यदि $|A| \neq 0$ हो।

(ix) यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तब $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(adj\ A)$

4.1.8 *रैखिक समीकरणों के निकाय (System of Linear equations)*

(i) निम्नलिखित समीकरण निकाय पर विचार कीजिए

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3,$$

आव्यूहों के रूप में इन समीकरणों को $AX = B$, से व्यक्त कर सकते हैं जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

(ii) समीकरण AX = B के अद्वितीय (unique) हल को $X = A^{-1}B$, जहाँ $|A| \neq 0$ है द्वारा दिया जाता है।

(iii) समीकरणों का एक निकाय संगत या असंगत होता है यदि इसके हल का अस्तित्व है अथवा नहीं है।

(iv) आव्यूह समीकरण AX = B में वर्ग आव्यूह A के लिए

(a) यदि $|A| \neq 0$, तो अद्वितीय हल अस्तित्व है।

(b) यदि $|A| = 0$ और $(adj\ A)\ B \neq 0$, तो किसी हल का अस्तित्व नहीं है।

(c) यदि $|A| = 0$ और $(adj\ A)\ B = 0$, तो निकाय संगत तथा अनंत हल होते हैं।

4.2 हल किए हुए उदाहरण (Solved Examples)

लघु उत्तरीय (S.A.)

उदाहरण 1 यदि $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$, तो x ज्ञात कीजिए।

हल हमें दिया है $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$ इसलिए

$$2x^2 - 40 = 18 - 40 \quad \Rightarrow x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$$

उदाहरण 2 यदि $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta + \Delta_1 = 0$

हल हमें दिया है $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}$

पंक्तियों और स्तंभों का परस्पर परिवर्तन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & yz & x \\ 1 & zx & y \\ 1 & xy & z \end{vmatrix} \quad = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x & xyz & x^2 \\ y & xyz & y^2 \\ z & xyz & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ y & 1 & y^2 \\ z & 1 & z^2 \end{vmatrix},$$ C_1 और C_2 का परस्पर परिवर्तन करने पर

$$= (-1)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = -\Delta$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta_1 + \Delta = 0$$

उदाहरण 3 बिना प्रसरण किए, दिखाइए कि

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{cosec}^2\theta & \cot^2\theta & 1 \\ \cot^2\theta & \operatorname{cosec}^2\theta & -1 \\ 42 & 40 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

हल $C_1 \to C_1 - C_2 - C_3$ का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta - 1 & \cot^2\theta & 1 \\ \cot^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta + 1 & \operatorname{cosec}^2\theta & -1 \\ 0 & 40 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cot^2\theta & 1 \\ 0 & \operatorname{cosec}^2\theta & -1 \\ 0 & 40 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

उदाहरण 4 दर्शाइए कि $\Delta = \begin{vmatrix} x & p & q \\ p & x & q \\ q & q & x \end{vmatrix} = (x-p)(x^2 + px - 2q^2)$

हल $C_1 \to C_1 - C_2$ का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-p & p & q \\ p-x & x & q \\ 0 & q & x \end{vmatrix} = (x-p)\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ -1 & x & q \\ 0 & q & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-p)\begin{vmatrix} 0 & p+x & 2q \\ -1 & x & q \\ 0 & q & x \end{vmatrix}, \quad R_1 \to R_1 + R_2 \text{ का प्रयोग करने पर}$$

C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर हम पाते हैं

$$\Delta = (x-p)(px + x^2 - 2q^2) = (x-p)(x^2 + px - 2q^2)$$

उदाहरण 5 यदि $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix}$, दो दिखाइए कि $\Delta = 0$ है।

हल पंक्तियों तथा स्तभों का परस्पर विनिमय करने पर हम पाते हैं कि $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a-c \\ b-a & 0 & b-c \\ c-a & c-b & 0 \end{vmatrix}$

R_1, R_2 और R_3 में '–1' उभयनिष्ठ लेने पर हम पाते हैं

$$\Delta = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix} = -\Delta$$

$$\Rightarrow \quad 2\Delta = 0 \quad \text{या} \quad \Delta = 0$$

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि $(A^{-1})' = (A')^{-1}$, जहाँ A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

हल क्योंकि A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है इसलिए $|A| \neq 0$

हम जानते हैं कि $|A| = |A'|$ परंतु $|A| \neq 0$. इसलिए $|A'| \neq 0$ अर्थात्, A′ भी व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

हम जानते हैं कि $AA^{-1} = A^{-1} A = I$

दोनों ओर आव्यूहों का परिवर्त लेने पर हम पाते हैं

$(A^{-1})' \; A' = A' \, (A^{-1})' = (I)' = I$

अत: $(A^{-1})'$ आव्यूह A' का व्युत्क्रम है अर्थात् $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 7 यदि $\Delta = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$, का एक मूल $x = -4$ हो तो अन्य दो मूलों को ज्ञात कीजिए।

हल $R_1 \to (R_1 + R_2 + R_3)$ का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\begin{vmatrix} x+4 & x+4 & x+4 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix}.$$

R_1 से उभयनिष्ठ $(x + 4)$ लेने पर हम पाते हैं

$$\Delta = (x+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1$, $C_3 \to C_3 - C_1$, के प्रयोग से हम पाते हैं

$$\Delta = (x+4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix}.$$

R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर हम पाते हैं

$\Delta = (x + 4) [(x - 1) (x - 3) - 0]$. परंतु $\Delta = 0$ दिया है इसलिए

$$x = -4, 1, 3$$

अत: $x = -4$ के अतिरिक्त अन्य दो मूल 1 तथा 3 हैं।

उदाहरण 8 एक त्रिभुज ABC में यदि

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin B & 1+\sin C \\ \sin A+\sin^2 A & \sin B+\sin^2 B & \sin C+\sin^2 C \end{vmatrix} = 0$$

तो सिद्ध कीजिए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin B & 1+\sin C \\ \sin A+\sin^2 A & \sin B+\sin^2 B & \sin C+\sin^2 C \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin B & 1+\sin C \\ -\cos^2 A & -\cos^2 B & -\cos^2 C \end{vmatrix}, R_3 \to R_3 - R_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+\sin A & \sin B - \sin A & \sin C - \sin B \\ -\cos^2 A & \cos^2 A - \cos^2 B & \cos^2 B - \cos^2 C \end{vmatrix}, (C_3 \to C_3 - C_2 \text{ और } C_2 \to C_2 - C_1)$$

R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर हम पाते हैं

$$\Delta = (\sin B - \sin A)(\sin^2 C - \sin^2 B) - (\sin C - \sin B)(\sin^2 B - \sin^2 A)$$

$$= (\sin B - \sin A)(\sin C - \sin B)(\sin C - \sin A) = 0$$

$\Rightarrow$ $\sin B - \sin A = 0$ या $\sin C - \sin B$ या $\sin C - \sin A = 0$

$\Rightarrow$ $A = B$ या $B = C$ या $C = A$

अर्थात् त्रिभुज ABC समद्विबाहु त्रिभुज है।

उदाहरण 9 दिखाइए कि यदि सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & \sin 3\theta \\ -7 & 8 & \cos 2\theta \\ -11 & 14 & 2 \end{vmatrix} = 0$ है तब $\sin\theta = 0$ या $\frac{1}{2}$ होगा।

हल $R_2 \to R_2 + 4R_1$ और $R_3 \to R_3 + 7R_1$ के प्रयोग से हम पाते हैं कि

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & \sin 3\theta \\ 5 & 0 & \cos 2\theta + 4\sin 3\theta \\ 10 & 0 & 2+7\sin 3\theta \end{vmatrix} = 0$$

या $2\,[5\,(2 + 7\sin 3\theta) - 10\,(\cos 2\theta + 4\sin 3\theta)] = 0$

या $2 + 7\sin 3\theta - 2\cos 2\theta - 8\sin 3\theta = 0$

या $2 - 2\cos 2\theta - \sin 3\theta = 0$

या $\sin\theta\,(4\sin^2\theta + 4\sin\theta - 3) = 0$

या $\sin\theta = 0$ या $(2\sin\theta - 1) = 0$ या $(2\sin\theta + 3) = 0$

या $\sin\theta = 0$ या $\sin\theta = \frac{1}{2}$ (क्यों ?)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)

उदाहरण 10 और 11 में दिए गए चार विकल्पों में से प्रत्येक के लिए सही उत्तर चुनिए-

उदाहरण 10 यदि $\Delta = \begin{vmatrix} Ax & x^2 & 1 \\ By & y^2 & 1 \\ Cz & z^2 & 1 \end{vmatrix}$ तथा $\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ x & y & z \\ zy & zx & xy \end{vmatrix}$, तब

(A) $\Delta_1 = -\Delta$ (B) $\Delta \neq \Delta_1$ (C) $\Delta - \Delta_1 = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही उत्तर (C) है क्योंकि $\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ x & y & z \\ zy & zx & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & x & yz \\ B & y & zx \\ C & z & xy \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} Ax & x^2 & xyz \\ By & y^2 & xyz \\ Cz & z^2 & xyz \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} Ax & x^2 & 1 \\ By & y^2 & 1 \\ Cz & z^2 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

उदाहरण 11 यदि $x, y \in \mathbf{R}$, तब सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x & 1 \\ \sin x & \cos x & 1 \\ \cos(x+y) & -\sin(x+y) & 0 \end{vmatrix}$ किस अंतराल में है

(A) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ (B) [–1, 1] (C) $-\sqrt{2}, 1$ (D) $-1, -\sqrt{2},$

हल सही उत्तर (A) है। वास्तव में $R_3 \to R_3 - \cos y R_1 + \sin y R_2$ के प्रयोग से हमें प्राप्त होता है

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x & 1 \\ \sin x & \cos x & 1 \\ 0 & 0 & \sin y - \cos y \end{vmatrix}.$$

R_3 के अनुदिश प्रसरण करने पर हम पाते हैं

$$\Delta = (\sin y - \cos y)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= (\sin y - \cos y) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin y - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos y\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin y - \sin\frac{\pi}{4}\cos y\right) = \sqrt{2}\sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$$

इसलिए $-\sqrt{2} \le \Delta \le \sqrt{2}$

उदाहरण 12 से 14 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान को भरिए–

उदाहरण 12 यदि A, B, C एक त्रिभुज के कोण हैं तब

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2 A & \cot A & 1 \\ \sin^2 B & \cot B & 1 \\ \sin^2 C & \cot C & 1 \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

हल उत्तर 0 है। $R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ का प्रयोग कीजिए।

उदाहरण 13 सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{23}+\sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{15}+\sqrt{46} & 5 & \sqrt{10} \\ 3+\sqrt{115} & \sqrt{15} & 5 \end{vmatrix}$ = ________

हल उत्तर 0 है। C_2 और C_3 से उभयनिष्ठ $\sqrt{5}$ निकालिए और उसके बाद $C_1 \to C_3 - \sqrt{3}\ C_2$ के प्रयोग से वाँछित परिणाम प्राप्त होगा।

उदाहरण 14 सारणिक

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2 23° & \sin^2 67° & \cos 180° \\ -\sin^2 67° & -\sin^2 23° & \cos^2 180° \\ \cos 180° & \sin^2 23° & \sin^2 67° \end{vmatrix} = _______.$$

हल $\Delta = 0$ है। $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ का प्रयोग कीजिए।

बताइए कि उदाहरण 15 से 18 तक दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य–

उदाहरण 15 सारणिक

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) & \cos 2y \\ \sin x & \cos x & \sin y \\ -\cos x & \sin x & \cos y \end{vmatrix}, x \text{ से स्वतंत्र है।}$$

हल सत्य है। $R_1 \to R_1 + \sin y R_2 + \cos y\ R_3$ का प्रयोग कीजिए और फिर सरल कीजिए।

उदाहरण 16 सारणिक

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}^nC_1 & {}^{n+2}C_1 & {}^{n+4}C_1 \\ {}^nC_2 & {}^{n+2}C_2 & {}^{n+4}C_2 \end{vmatrix} = 8$$

हल सत्य है।

उदाहरण 17 यदि $A = \begin{matrix} x & 5 & 2 \\ 2 & y & 3 \\ 1 & 1 & z \end{matrix}$, $xyz = 80$, $3x + 2y + 10z = 20$, तब

$$A\ adj.\ A = \begin{matrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{matrix}$$

हल : असत्य

उदाहरण 18 यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & y & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

तब $x = 1, y = -1$

हल सत्य

4.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय (S.A.)

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके प्रश्न 1 से 6 तक के मान निकालिए–

1. $\begin{vmatrix} x^2-x+1 & x-1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} a+x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 0 & xy^2 & xz^2 \\ x^2y & 0 & yz^2 \\ x^2z & zy^2 & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 3x & -x+y & -x+z \\ x-y & 3y & z-y \\ x-z & y-z & 3z \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} x+4 & x & x \\ x & x+4 & x \\ x & x & x+4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके प्रश्न 7 से 9 तक सिद्ध कीजिए।

7. $\begin{vmatrix} y^2z^2 & yz & y+z \\ z^2x^2 & zx & z+x \\ x^2y^2 & xy & x+y \end{vmatrix} = 0$

8. $\begin{vmatrix} y+z & z & y \\ z & z+x & x \\ y & x & x+y \end{vmatrix} = 4xyz$

9. $\begin{vmatrix} a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ 2a+1 & a+2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^3$

10. यदि $A + B + C = 0$ तो सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} 1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & 1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & 1 \end{vmatrix} = 0$

11. यदि एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) तथा त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई 'a' है तो सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \frac{3a^4}{4}$

12. θ का वह मान ज्ञात कीजिए जो $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sin 3\theta \\ -4 & 3 & \cos 2\theta \\ 7 & -7 & -2 \end{bmatrix} = 0$ को संतुष्ट करता हो।

13. यदि $\begin{matrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{matrix} = 0$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

14. यदि $a_1, a_2, a_3, ..., a_r$ G.P. में हैं तो सिद्ध कीजिए कि सारणिक

$\begin{vmatrix} a_{r+1} & a_{r+5} & a_{r+9} \\ a_{r+7} & a_{r+11} & a_{r+15} \\ a_{r+11} & a_{r+17} & a_{r+21} \end{vmatrix}$ r से स्वतंत्र है।

15. दर्शाइए कि a के किसी भी मान के लिए बिंदु $(a + 5, a - 4)$, $(a - 2, a + 3)$ और (a, a) एक सरल रेखा में नहीं है।

16. दर्शाइए कि त्रिभुज ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है यदि सारणिक

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\cos A & 1+\cos B & 1+\cos C \\ \cos^2 A + \cos A & \cos^2 B + \cos B & \cos^2 C + \cos C \end{bmatrix} = 0$$

17. यदि $A = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$ तो A^{-1} ज्ञात कीजिए और दर्शाइए कि $A^{-1} = \frac{A^2 - 3I}{2}$.

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

18. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

A^{-1} का प्रयोग करके रैखिक समीकरणों के निकाय $x - 2y = 10$, $2x - y - z = 8$, $-2y + z = 7$ को हल कीजिए।

19. आव्यूह विधि से समीकरण निकाय $3x + 2y - 2z = 3$, $x + 2y + 3z = 6$, $2x - y + z = 2$ को हल कीजिए।

20. यदि $A = \begin{matrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{matrix}$, $B = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$, तो BA ज्ञात कीजिए और इसका प्रयोग समीकरण निकाय $y + 2z = 7$, $x - y = 3$, $2x + 3y + 4z = 17$ को हल करने के लिए कीजिए।

21. यदि $a + b + c \neq 0$ और $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$, तो सिद्ध कीजिए कि $a = b = c$

22. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} bc - a^2 & ca - b^2 & ab - c^2 \\ ca - b^2 & ab - c^2 & bc - a^2 \\ ab - c^2 & bc - a^2 & ca - b^2 \end{vmatrix}$, $a + b + c$ से विभाजित होता है।

इसका भागफल भी ज्ञात कीजिए।

23. यदि $x + y + z = 0$, तो सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix} = xyz \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

बहुविकल्पीय प्रश्न (Objective Type Questions)

प्रश्न 24 से 37 तक प्रत्येक के लिए दिए गए चार विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए–

24. यदि $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$, तब x का मान है

(A) 3 (B) ± 3 (C) ± 6 (D) 6

25. सारणिक $\begin{vmatrix} a-b & b+c & a \\ b-a & c+a & b \\ c-a & a+b & c \end{vmatrix}$ का मान है

(A) $a^3 + b^3 + c^3$ (B) $3abc$

(C) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ (D) इनमें से कोई नहीं

26. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल 9 वर्ग इकाई है जिसके शीर्ष (–3, 0), (3, 0) और (0, k) हैं तो k का मान होगा

(A) 9 (B) 3

(C) – 9 (D) 6

27. सारणिक $\begin{vmatrix} b^2-ab & b-c & bc-ac \\ ab-a^2 & a-b & b^2-ab \\ bc-ac & c-a & ab-a^2 \end{vmatrix}$ बराबर है

(A) $abc\,(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$ (B) $(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$

(C) $(a+b+c)\,(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$ (D) इनमें से कोई नहीं

28. अंतराल $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ में सारणिक $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \cos x \\ \cos x & \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 0$ के विभिन्न वास्तविक मूलों की संख्या है

(A) 0 (B) 2 (C) 1 (D) 3

29. यदि A, B और C एक त्रिभुज के कोण हैं तो सारणिक

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix}$$ बराबर है

(A) 0 (B) – 1 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं

30. यदि $f(t) = \begin{vmatrix} \cos t & t & 1 \\ 2\sin t & t & 2t \\ \sin t & t & t \end{vmatrix}$, तब $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t)}{t^2}$ बराबर है

(A) 0 (B) – 1 (C) 2 (D) 3

31. यदि θ एक वास्तविक संख्या है तब $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sin\theta & 1 \\ 1+\cos\theta & 1 & 1 \end{vmatrix}$ का अधिकतम मान है।

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{4}$

32. यदि $f(x) = \begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix}$, तब

(A) $f(a) = 0$ (B) $f(b) = 0$ (C) $f(0) = 0$ (D) $f(1) = 0$

33. यदि $A = \begin{matrix} 2 & \lambda & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix}$, तब A^{-1} का अस्तित्व है यदि

(A) $\lambda = 2$ (B) $\lambda \neq 2$ (C) $\lambda \neq -2$ (D) इनमें से कोई नहीं

34. यदि A और B व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं तब निम्न में से कौन सा सत्य नहीं है?

(A) $adj\ A = |A|.\ A^{-1}$ (B) $\det(A)^{-1} = [\det(A)]^{-1}$

(C) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ (D) $(A + B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$

35. यदि x, y, z में कोई भी शून्य नहीं है और $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = 0$, है तब $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$ बराबर है

(A) $x\, y\, z$ (B) $x^{-1}\, y^{-1}\, z^{-1}$ (C) $-x\, -y\, -z$ (D) -1

36. सारणिक $\begin{vmatrix} x & x+y & x+2y \\ x+2y & x & x+y \\ x+y & x+2y & x \end{vmatrix}$ का मान है

(A) $9x^2\,(x+y)$ (B) $9y^2\,(x+y)$ (C) $3y^2\,(x+y)$ (D) $7x^2\,(x+y)$

37. 'a' के ऐसे दो मान हैं जिनके लिए $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 4 & 2a \end{vmatrix} = 86$, है तो इन दो संख्याओं का योग है

(A) 4 (B) 5 (C) -4 (D) 9

रिक्त स्थान भरिए–

38. यदि A एक 3×3 कोटि का आव्यूह है तो $|3A| =$ ________

39. यदि A एक 3×3 कोटि का व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तब $|A^{-1}| =$ ________

40. यदि $x, y, z \in \mathbf{R}$, तब सारणिक $\begin{vmatrix} (2^x+2^{-x})^2 & (2^x-2^{-x})^2 & 1 \\ (3^x+3^{-x})^2 & (3^x-3^{-x})^2 & 1 \\ (4^x+4^{-x})^2 & (4^x-4^{-x})^2 & 1 \end{vmatrix}$ बराबर है ________।

41. यदि $\cos 2\theta = 0$, तब $\begin{vmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}^2 =$ ________.

42. यदि A एक 3×3 कोटि का आव्यूह है तब $(A^2)^{-1} =$ ________

43. यदि A एक 3×3 कोटि का आव्यूह है तब A के सारणिक के सभी उप-सारणिकों की संख्या ________ है।

44. एक सारणिक A की किसी पंक्ति के अवयवों और उनके संगत सहखंडों के गुणनफल का योग __________ के बराबर होता है।

45. यदि समीकरण $\begin{vmatrix} x & 3 & 7 \\ 2 & x & 2 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$ का एक मूल $x = -9$ है तब इसके अन्य दो मूल __________ हैं।

46. $\begin{vmatrix} 0 & xyz & x-z \\ y-x & 0 & y-z \\ z-x & z-y & 0 \end{vmatrix} =$ __________

47. यदि $f(x) = \begin{vmatrix} (1+x)^{17} & (1+x)^{19} & (1+x)^{23} \\ (1+x)^{23} & (1+x)^{29} & (1+x)^{34} \\ (1+x)^{41} & (1+x)^{43} & (1+x)^{47} \end{vmatrix} = \text{A} + \text{B}x + \text{C}x^2 + ...,$ है तब A = ________

बताइए कि प्रश्न 48 से 58 तक दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य–

48. $(\text{A}^3)^{-1} = (\text{A}^{-1})^3$, जहाँ A एक वर्ग आव्यूह है और $|\text{A}| \neq 0$ है।

49. $(a\text{A})^{-1} = \frac{1}{a}\text{A}^{-1}$, जहाँ a एक वास्तविक संख्या है और A एक वर्ग आव्यूह है।

50. $|\text{A}^{-1}| \neq |\text{A}|^{-1}$, जहाँ A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

51. यदि A और B कोटि 3 के आव्यूह हैं और $|\text{A}| = 5, |\text{B}| = 3$, तब $|3\text{AB}| = 27 \times 5 \times 3 = 405.$

52. यदि तीन कोटि के एक सारणिक का मान 12 है तब इसके प्रत्येक अवयव को इसके सहखंड से बदलने पर प्राप्त सारणिक का मान 144 होगा।

53. $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+a \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix} = 0$, जहाँ a, b, c, A.P में है।

54. $|adj.\ \text{A}| = |\text{A}|^2$, जहाँ A एक कोटि 2 का वर्ग आव्यूह है।

55. सारणिक $\begin{vmatrix} \sin A & \cos A & \sin A+\cos B \\ \sin B & \cos A & \sin B+\cos B \\ \sin C & \cos A & \sin C+\cos B \end{vmatrix} = 0$

56. यदि सारणिक $\begin{vmatrix} x+a & p+u & l+f \\ y+b & q+v & m+g \\ z+c & r+w & n+h \end{vmatrix}$ को कोटि 3 के K सारणिकों में ऐसे विघटित किया जाए कि उनके प्रत्येक अवयव में केवल एक पद हो तब K का मान 8 है।

57. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = 16$, है तब $\Delta_1 = \begin{vmatrix} p+x & a+x & a+p \\ q+y & b+y & b+q \\ r+z & c+z & c+r \end{vmatrix} = 32$ होगा।

58. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1+\sin\theta) & 1 \\ 1 & 1 & 1+\cos\theta \end{vmatrix}$ का अधिकतम मान $\frac{1}{2}$ है।